Travaux dirigés 3 : corrigé

Exercice 1 : Chute libre

On étudie la chute libre d'un parachutiste de masse m=80kg sautant d'une hauteur y(0)= 3000m.

a. Etude sans vitesse initiale, sans frottement :

1. Référentiel : terrestre sup. gal.
   Système : parachutiste
   Système de coord. : cartésien
2. $$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$
   $$\vec{P} = m\vec{a}$$
   $$m\vec{g} = m\vec{a}$$
   $$\vec{g} = \vec{a}$$
3. $v(t) = \int a(t).dt = \int -g\ dt = -gt$
4. $y(t) = \int v(t).dt = \int -gt\ dt = -\frac{gt^2}{2} + 3000$
5. $y(T) = -\frac{gT^2}{2} + 3000 = 0\ soit\ T = \sqrt{\frac{6000}{g}} \approx 24.7\ s$
6. $v(t) = -gt = 242\ m/s$
7. $$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$
   $$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$
   $$m\vec{g} - \alpha\vec{v} = m\vec{a}$$
   $$-g - \frac{\alpha v}{m} = a$$
8. $-g - \frac{\alpha v}{m} = \frac{dv}{dt}$ soit $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha v}{m} = -g$
   Avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$
   C'est une équation différentielle d'ordre 1
9. Equation homogène : $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha v}{m} = 0$ Solution : $v_h = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$

Le second membre étant constant (égal à −g), on cherche une solution particulière v_p = cste, soit $\frac{dv}{dt} = 0$ et donc $v_p = -g\,\tau$. Finalement :

$$v(t) = g\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$$

10. On trouve v_{max} = 69,5 m/s, ce qui est bien plus faible qu'au 6, c'est normal puisqu'on considère les frottements de l'air qui s'opposent au mouvement.

Exercice 2 : Pénalité au rugby :

1. Référentiel : terrestre sup. gal.
   Système : ballon
   Système de coord. : cartésien
2. $$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$
   $$\vec{P} = m\vec{a}$$
   $$m\vec{g} = m\vec{a}$$
   $$\vec{g} = \vec{a}$$
3. $\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} \int 0.dt \\ \int a(t).dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int 0.dt \\ \int -g\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cos\beta \\ -gt + v_0\sin\beta \end{pmatrix}$
4. $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} \int v_0\cos\beta.dt \\ \int -gt + v_0\sin\beta.dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0.t.\cos\beta \\ -\frac{gt^2}{2} + v_0.t.\sin\beta \end{pmatrix}$
5. De l'équation x(t) on trouve $t = \frac{x}{v_0.\cos\beta}$, et si on remplace dans y(t) :

$$y(x) = -\frac{g\left(\frac{x}{v_0.\cos\beta}\right)^2}{2} + v_0.\frac{x}{v_0.\cos\beta}.\sin\beta$$

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2.\cos^2\beta} + x\tan(\beta)$$

C'est une parabole

6. On évalue la fonction précédente quand le ballon arrive au but, c'est-à-dire, à x= 40m :

$$y(40) = -\frac{gx^2}{2v_0^2.\cos^2\beta} + x\tan(\beta) \approx 7{,}36\,m$$

Le joueur marque un but.